Uitwerking Puzzel 95-3

Wobien Doyer

Alleen positieve cijfers tellen mee

Lieke de Rooij

In deze puzzel gaan we zoeken naar bepaalde positieve gehele getallen met een gegeven aantal cijfers die groter zijn dan 0.

En dat doen we in verschillende talstelsels.
We kiezen een talstelsel met grondtal t.
We zullen getallen die zijn genoteerd in een talstelsel met een grondtal $t \neq 10$ onderstrepen, bijvoorbeeld als $t = 7$ dan is $18 = \underline{24}$
We kiezen ook positieve gehele getallen a en c.
De functie $f_t(n)$ = aantal cijfers ongelijk 0 van n, waarbij n is genoteerd in het t-tallig stelsel.
Als bijvoorbeeld $t = 10$ en $n = 105$, dan is $f_t(105) = 2$ (want 105 heeft 2 cijfers ongelijk 0).
We gaan op zoek naar een geheel getal b, zo dat $f_t(a \cdot b) = c$.

Een voorbeeld: $t = 3$, $a = 46 = \underline{1201}$ en $c = 5$. We zoeken een b zo, dat $f_3(a \cdot b) = 5$. De kleinste is $b = 5 = \underline{12}$
Dan is $f_3(a \cdot b) = f_3(230) = f_3\ (\underline{22112}) = 5$.
Met name opgave 1a is ervoor bedoeld om het probleem en de oplossingen onder de knie te krijgen.

Opgave 1a: Bepaal de kleinste b voor $t = 2$, met $a = 15$ en $c = 4, 5, 6$ en 7.
Uitwerking:
$c = 4$: Voor $t = 2$ hebben we $a = 15 = \underline{1111}$ en dus voor $b = 1$: $f_2(1 \cdot \underline{1111}) =$
$f_2(\underline{1111}) = 4$. De kleinste waarde van b waarvoor $c = 4$ is dus $b = 1$.
Voor de grotere waarden van c kunnen we een lijstje maken van oneven veelvouden van 15, geschreven in het 2-tallig stelsel en kijken naar het aantal cijfers: (even veelvouden kunnen we door 2 delen, dan krijgen we een kleiner veelvoud met hetzelfde aantal enen)

$3 \cdot 15 = 45 = \underline{101101}$	$f_2(3 \cdot \underline{1111}) = 4$
$5 \cdot 15 = 75 = \underline{1001011}$	$f_2(5 \cdot \underline{1111}) = 4$
$7 \cdot 15 = 105 = \underline{1101001}$	$f_2(7 \cdot \underline{1111}) = 4$
$9 \cdot 15 = 135 = \underline{10000111}$	$f_2(9 \cdot \underline{1111}) = 4$
$11 \cdot 15 = 165 = \underline{10100101}$	$f_2(11 \cdot \underline{1111}) = 4$
$13 \cdot 15 = 195 = \underline{11000011}$	$f_2(13 \cdot \underline{1111}) = 4$
$15 \cdot 15 = 225 = \underline{11100001}$	$f_2(15 \cdot \underline{1111}) = 4$
$17 \cdot 15 = 255 = \underline{11111111}$	$f_2(17 \cdot \underline{1111}) = 8$
$19 \cdot 15 = 285 = \underline{100011101}$	$f_2(19 \cdot \underline{1111}) = 5$
$21 \cdot 15 = 315 = \underline{100111011}$	$f_2(21 \cdot \underline{1111}) = 6$
$23 \cdot 15 = 345 = \underline{101011001}$	$f_2(23 \cdot \underline{1111}) = 5$
$25 \cdot 15 = 375 = \underline{101110111}$	$f_2(25 \cdot \underline{1111}) = 7$

We vinden zo de kleinste waarden voor b:

$f_2(1 \cdot 15) = 4$; $c = 4$, $b = 1$

$f_2(19 \cdot 15) = 5$; $c = 5$, $b = 19$
$f_2(21 \cdot 15) = 6$; $c = 6$, $b = 21$
$f_2(25 \cdot 15) = 7$; $c = 7$, $b = 25$

Opgave 1b: Stel een algemene formule/recept op voor b als functie van c met $t = 2$ en $a = 15$?
Bij opgave 1b hoeft dat niet per se de kleinste oplossing te zijn. Het mag wel, dat is nog mooier, maar levert geen extra punten op voor de ladder.
Uitwerking
Als we een waarde voor $b = x$ hebben waarvoor geldt: $f_2(x \cdot 15) = n$ dan kunnen we als volgt een waarde van $b = y$ vinden waarvoor geldt: $f_2(y \cdot 15) = n + 4$:
Kies daarvoor $y = 16x + 1$. Dan hebben we $y \cdot 15 = (16x + 1) \cdot 15 = 16 \cdot 15x + 15$.
$16 \cdot 15x$ bevat in het 2-tallig stelsel dezelfde cijfers als $x \cdot 15$, met 4 nullen erachter.
Als we er 15 bij optellen worden die nullen vervangen door 4 enen. Het aantal cijfers ongelijk 0 wordt dus 4 groter.

Omdat we al waarden voor b hebben waarbij het aantal cijfers 4, 5, 6 en 7 is kunnen we zo alle functiewaarden > 3 verkrijgen.
De formules zijn dan:
als $c = 4k$: $b = \sum_{i=0}^{k-1} 16^i$
als $c = 4k + 5$: $b = 16^k . 19 + \sum_{i=0}^{k-1} 16^i$

als $c = 4k + 6$: $b = 16^k . 21 + \sum_{i=0}^{k-1} 16^i$
als $c = 4k + 7$: $b = 16^k . 25 + \sum_{i=0}^{k-1} 16^i$

Opgave 1c: Leg uit of het ook mogelijk is om oplossingen voor b te vinden als $c = 2$ of $c = 3$.
Uitwerking: Als er een oplossing is voor $c = 2$ of $c = 3$ moet een veelvoud van 15 in het 2-tallig stelsel geschreven kunnen worden met 2 of 3 cijfers en dus als een som van twee of drie verschillende 2-machten. Met andere woorden, die som van 2 of 3 verschillende 2-machten is gelijk aan 0 modulo 15.
We maken een lijstje van de waarden modulo 15 van de mogelijke tweemachten:
$2^0 \equiv 1 \bmod 15$
$2^1 \equiv 2 \bmod 15$
$2^2 \equiv 4 \bmod 15$
$2^3 \equiv 8 \bmod 15$
$2^4 \equiv 1 \bmod 15$
$2^5 \equiv 2 \bmod 15$
⋮
⋮
Na 8 mod 15 gaat de rij zich herhalen, dus de som van twee of drie van deze waarden (1, 2, 4, 8) moet een 15-voud zijn. 0 zal niet lukken, want die komt in het lijstje niet voor. En 30 of meer lukt ook niet omdat de som van maximaal 3 van deze waarden maximaal $3 \cdot 8 = 24$ kan zijn. Alleen 15 blijft dus over, en dat lukt ook niet. Immers 15 is oneven dus zal één van de waarden 1 moeten zijn. En omdat $3 \cdot 4 < 15$ moet ook één van de waarden 8 zijn. Dan hebben we voor c = 2 hoogstens 1 + 8 = 9 en voor c = 3 ofwel 1 + 4 + 8 = 12 ofwel 1 + 8 + 8 =17, maar nooit 15.
Er zijn dus geen oplossingen voor b met minder dan 4 cijfers.

Opgave 2: Bepaal voor $t = 10$ de kleinste a waarvoor er oplossingen zijn bij een $c < f_t(a)$.
Uitwerking: Als $a < 11$ dan is $f_t(a) = 1$. $c < 1$ kan natuurlijk niet.
Als $a = 11$ dan is $f_t(a) = 2$. Er zou dus een veelvoud van 11 moeten zijn met precies één cijfer>0. Dat kan niet. Voor $a = 12$ lukt het wel: $f_t(a) = 2$ en $f_t(5.a) = f_t(60) = 1$
$a = 12$ is dus de kleinste a die voldoet.

Je kunt je natuurlijk afvragen of voor gegeven t en a er voor alle $c \geq f_t(a)$ een oplossing bestaat. Dat blijkt wel zo te zijn, maar om een net bewijs op te schrijven is zeker niet eenvoudig. Dat vragen we dan ook niet, maar wie er zin in heeft kan het natuurlijk proberen. Maar nu zoeken we het alleen voor bepaalde combinaties van a en t.

Opgave 3a: Toon aan dat als $a \leq t$ er voor elke $c \geq f_t(a)$ een b bestaat zodat $f_t(a \cdot b) = c$.
Uitwerking: Als $a \leq t$ dan geldt $a = \underline{a}$ (als $a < t$) of $a = \underline{10}$ (als $a = t$). In beide gevallen is $f_t(a) = 1$. Voor een bepaalde waarde van $c \geq 1$ kiezen we voor b het getal dat in het t-tallig stelsel uit c enen bestaat. $a \cdot b$ bestaat dan uit c cijfers a (als $a < t$) of uit c cijfers 1 en één nul (als $a = t$), dus in beide gevallen geldt dus $f_t(a \cdot b) = c$

Opgave 3b: Idem voor het geval $a = t + 1$.
Uitwerking: als $a = t + 1$ dan is dus t-tallig geschreven $a = \underline{11}$ dus $f_t(a) = 2$
Als c even kies dan voor b het getal dat (in het t-tallig stelsel) $c - 1$ cijfers bestaat, steeds afwisselend 1 en 0, eindigend met 1. Voor bv $c = 6$ is dan $a.b = \underline{11} \cdot \underline{10101} = \underline{111111}$, met 6 cijfers.
Als c oneven en $t > 2$ nemen we voor b weer een getal dat uit $c - 1$ cijfers bestaat, en weer afwisselend 1 en 0, behalve het laatste cijfer dat 1 wordt. Voor bv $c = 7$ is dan
$a.b = \underline{11} \cdot \underline{101011} = \underline{1111121}$.
Als c oneven en $t = 2$ lukt $b = 3$ met het met (2-tallig geschreven) getal van c cijfers, beginnend met 3 enen en vervolgens om-en-om nullen en enen. Voor bv $c = 7$ wordt dat
$a.b = \underline{11} \cdot \underline{1110101} = \underline{101011111}$

Opgave 3c: Zoek nog meer combinaties van t en a waarbij je kan bewijzen dat bij elke $c \geq f_t(a)$ een b te vinden is zodat $f_t(a \cdot b) = c$, en geef dat bewijs.
Dit is een open vraag met veel mogelijkheden.
Een aantal inzenders heeft zich hieraan gewaagd. Gevonden werden: alle getallen met 2 cijfers, alle getallen met alleen enen en alle getallen in het 2-tallig stelsel. Harm Bakker kwam het verst met alle getallen die onderling ondeelbaar zijn met t (ofwel getallen die geen factoren gemeen hebben met t), waaronder dus alle getallen geschreven in een talstelsel met t priem, en ook alle getallen met niet meer dan één nul.

De aanpak hieronder lijkt veel op de aanpak van Harm, maar bewijst ook dat het lukt als de getallen a en t niet onderling ondeelbaar zijn en dus voor alle combinaties a en t.

Uitwerking: We bekijken de rij van machten van t modulo a:
$t^0 \bmod a$, $t^1 \bmod a$, $t^2 \bmod a$, $t^3 \bmod a$,.....
Omdat alle getallen uit de rij $< a$ en geheel zijn wordt op een gegeven moment een bepaald getal herhaald en wordt vanaf dat moment de rij cyclisch. (als $t^i \equiv t^j \bmod a$ dan is ook $t^{i+1} \equiv t^{j+1} \bmod a$). Laat $j > i$ en $m = j - i$ de kleinste cykel zijn in de rij.

We gebruiken een matrix met *m* kolommen voor de machten van *t* in de cykel met een ‘staartje’ voor de machten van *t* die aan de cykels voorafgaan en schrijven de veelvouden $a{\cdot}b$ daarin.
We beginnen daarbij met het getal *a* zelf. Daarvoor geldt natuurlijk dat de waarde van *a* modulo *a* gelijk is aan 0 en dat het aantal cijfers > 0 gelijk is aan $f_t(a)$. Vervolgens kunnen we stap voor stap veranderingen aanbrengen in de matrix zodanig dat de waarde modulo *a* gelijk blijft, en dus 0. De getallen die in de matrix komen zijn dus allemaal veelvouden van *a*, en dus voor zekere *b* gelijk aan $a \cdot b$ terwijl het aantal cijfers > 0 bij de veranderingen steeds één groter wordt. Dus hebben we een algoritme om voor elke $c \geq f_t(a)$ een *b* te vinden zodat $f_t(a{\cdot}b) = c$

We laten dat eerst zien met een eenvoudig voorbeeld. Daarna laten we zien dat dit lukt met elk getal in elk getalstelsel.
We kiezen daarvoor a =148 in het 10-tallig stelsel dus t =10. Dit is zorgvuldig gekozen om de waarde van *m* (= het aantal kolommen) binnen de perken te houden.

We bepalen eerst de rij machten van 10 mod 148:

$1 \equiv 1 \bmod 148$
$10 \equiv 10 \bmod 148$
$10^2 \equiv 100 \bmod 148$
$10^3 \equiv 112 \bmod 148$
$10^4 \equiv 84 \bmod 148$
$10^5 \equiv 100 \bmod 148$
$10^6 \equiv 112 \bmod 148$

De cykel begint dus bij 10^2 en heeft een lengte m = 3 en de lengte van de ‘aanloop’ *n* is 2.

We gebruiken dus een matrix van 3 kolommen (wit) en een ‘staartje’ van 2 vakjes (roze). Zie de schema’s hieronder.
De macht van 10 in elk wit vakje is het product van de getallen in de blauwe vakjes eronder en rechts ervan. In de onderste rij dus 10^4, 10^3 en 10^2, in de rij daarboven 10^3 keer zoveel, dus 10^7, 10^6 en 10^5 en zo verder.
Het gevolg hiervan is dat de waarden van alle 10-machten in dezelfde kolom dezelfde waarde modulo 148 hebben.

Hieronder 8 × het schema, genummerd met Romeinse cijfers in het gele vakje.
Elk schema bevat een getal in de witte en roze vakjes, die moeten worden gelezen van links naar rechts, en van boven naar beneden.

			$\cdot 10^9$	I
			$\cdot 10^6$	
			$\cdot 10^3$	
		1	4	8
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	II
			$\cdot 10^6$	
			$\cdot 10^3$	
	1	4	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	III
			$\cdot 10^6$	
		1	$\cdot 10^3$	
0	1	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	IV
	1	0	$\cdot 10^6$	
0	0	1	$\cdot 10^3$	
0	0	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	V
		10	$\cdot 10^6$	
0	0	1	$\cdot 10^3$	
0	0	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

		1	$\cdot 10^9$	VI
0	0	9	$\cdot 10^6$	
0	0	1	$\cdot 10^3$	
0	0	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	VII
10	0	9	$\cdot 10^6$	
0	0	1	$\cdot 10^3$	
0	0	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

			$\cdot 10^9$	VIII
		9	$\cdot 10^6$	
1	0	1	$\cdot 10^3$	
9	0	3	8	0
10^4	10^3	10^2	10	1

We beginnen met in schema I a = 148 in te vullen. De waarde van het getal in het schema modulo 148 is uiteraard 0.
We gaan in de volgende stappen veranderingen aanbrengen in de inhoud van de matrix, maar zorgen er daarbij steeds voor dat de waarde van het getal in het schema modulo 148 gelijk blijft, en dus 0.

In schema II hebben we het getal uit schema I met 10 vermenigvuldigd, en hebben we 1480. Uiteraard is dat 0 modulo 148.

Schema III krijgen we uit schema II door de 4 in de 100-tallen te splitsen in 3 + 1 en de 1 in het vakje erboven te schrijven. We zagen dat de waarde modulo 148 van de 10-macht in dezelfde kolom gelijk blijft dus door de 1 hoger in dezelfde kolom te schrijven verandert de waarde modulo 148 van het getal in het schema niet. Om het getal in schema III te lezen vullen we het vakje voor 10^4 op met een 0. Het getal in schema III is dus 101380 en is modulo 148 gelijk aan 0.

Schema IV ontstaat uit schema III door de 1 in de kolom van de 1000 tallen twee plaatsen omhoog te schuiven in dezelfde kolom en de tussenliggende cellen op te vullen met nullen. De waarde modulo 148 verandert dus niet. Het getal in schema IV is dus 1000100380 en is modulo 148 gelijk aan 0.

Schema V ontstaat uit schema IV door de 1 uit de kolom van de 1000-tallen in dezelfde rij te verplaatsen naar de kolom van de 100 tallen, en die 1 wordt daar (voorlopig) 10. Het getal in schema V is 1000100380 en dus niet veranderd.

Schema VI krijgen we uit schema V door de 10 in de derde kolom te splitsen in 9 en 1 in dezelfde kolom. We zagen al dat dit de waarde van het getal modulo 148 niet verandert. Het getal 100900100380 is dus 0 modulo 148.

Schema VII krijgen we uit schema VI door de bovenste 1 uit de rechter kolom één plaats naar rechts te schuiven. Omdat de tabel een cykel is komt hij dan in de linker kolom één regel lager, en wordt dan (voorlopig) 10. Het getal in schema VII is 100900100380, en dus niet veranderd.

Schema VIII krijgen we uit schema VII door de 10 in de meest linkse kolom binnen die kolom te splitsen in 9 en 1 en kunnen die zonder de modulowaarde te veranderen naar beneden schuiven. Het getal in schema VIII is 910190380 en is opnieuw modulo 148 gelijk aan 0.

Alle getallen in de schema's zijn dus veelvouden van 148, en het aantal cijfers > 0 in die getallen wordt, elke keer dat we een cijfer splitsen, één groter.
Voor a = 148 en t = 10 hebben we dus oplossingen voor b zodat $f_t(a{\cdot}b) = c$ voor c= 3, 4, 5 en 6. En we kunnen steeds doorgaan met splitsen en cyclisch naar rechts schuiven, en dus altijd een oplossing voor b vinden voor elke volgende waarde van c.

Conclusie:
We kunnen voor elke a in elk talstelsel met grondtal t een lijst maken van machten van t modulo a, en zo de lengte m van de cykel en de lengte n van de aanloop bepalen.
We kunnen dus voor elke combinatie a en t een schema maken met m kolommen en een staartje van n vakjes, en daar het getal a in uitschrijven.
Daarna kunnen we **altijd** het getal vermenigvuldigen met een macht van t zodat er cijfers in de witte vakjes komen. Het getal blijft dan modulo a gelijk aan 0.
Vervolgens hebben we in de witte vakjes **altijd** ofwel cijfers > 1 ofwel cijfers gelijk aan 1. Cijfers > 1 kunnen we splitsen zodat het aantal cijfers > 0 één groter wordt en cijfers gelijk aan 1 kunnen we naar de volgende kolom verplaatsen zodat ze veranderen in t, die we vervolgens weer kunnen splitsen, en ook dan wordt het aantal cijfers > 0 één groter.

Daarmee hebben we een algoritme om voor elke combinatie a en t voor elke $c \geq f_t(a)$ een b te vinden waarvoor $f_t(a{\cdot}b) = c$.